大家好，欢迎收看线性代数习题课。
我们在课堂上学习了矩阵的特征值与特征向量。
它们一个非常重要的应用在于求解。
常微分高阶线性方程在所有的线性系数为常数的情况下
一个典型的例子就是这个方程。
我们可以看到y是关于t的一个函数，这个方程包含了y
以及y的一阶二阶和三阶导。并且所有的系数均为常数。
我们首先要用矩阵的方法求解这个方程。
那么第一步就是应该找到我们应该研究的矩阵A。
在此之后我们还要试图找到矩阵At 的系数矩阵的第一列。那么现在
请你暂停这个视频，尝试写出矩阵A。
但是在你进行下一步之前，请回到这个视频，来确认你找到的矩阵A是正确的。
我们一会儿再见。好，现在我们来一起将这个问题转化成线性代数问题。
这个关键的点在于 我们要把y二阶导y一阶导与y放在一起作为一个列向量。
也就是说我们要考虑这个列向量。让我们来叫这个列向量u。
当然这个列向量也将是关于t的一个函数。
如果这个是u的话，那么u的导数应该是什么呢？u的导数将由如下的向量给出。
y的三阶导y的二阶导 y的一阶导，这就是u的导数。我们要做的就是把u的导数
写成一个矩阵A乘以u自身的形式。也就是说我们要把一个矩阵A放在这里。
如何找到矩阵A呢？我们需要这个方程来找到矩阵A。
你可以看出如果把这些项移至等号的右侧的话
那么y的三阶导就等于负2乘以y的二阶导
也就是说y的三阶导等于负2乘以y的二阶导 加上y的一阶导1乘以y的一阶导
再加上2倍的y，这样我们就得到了矩阵A的第一行。
那么对于第二个坐标，y的二阶导就等于 它自身，也就是说第二行应该就为1 0 0。
第三行同样，y的一阶导也等于 它自身，第三行就应该为0 1 0。
这就是我们所需要的矩阵A，你的答案正确吗？
下面我们要解决如下的问题，需要矩阵A的特征值与特征向量。
这也是一个很好的练习，现在请你暂停这个 视频，尝试独立求解以后的问题。
当你完成后，可以重新开始这个视频，我将介绍正确的解法。
好，我们来一起完成如下的问题。
我有这个矩阵A，下面我需要找到矩阵A的特征值与特征向量。

要做这一步的话，我们需要考虑如下矩阵的行列式。A减去λ乘以单位矩阵。
如果将这个写出的话，也就是以下的3乘以3矩阵。负2减去λ 1 2　负λ 0 0　负λ
你可以用任何一种方法求解这个矩阵的行列式。
你可以用行列式的定义式，也可以用其中一行或一列的展开。
如果你的求解正确的话，答案应该为1减去 λ乘以1加上λ再乘以2加上λ。

显而易见这个多项式有三个根。1、负1以及负2，这就是我们所要找的特证值。
所以第一个特证值为1 第二个特证值为负1，第三个特证值为负2。
如何找到它们对应的特证向量呢？我们以第一个特证值为例。
对应于第一个特证值特证向量应该存在于 这个矩阵的零空间中A减去单位向量。
也就是A减去λ1乘以单位向量。我们需要找到一个列向量，使得
这个矩阵乘以这个向量，值为零。如果我们展开的话，也就是负3 1 2 1 负1 0 0 1
负1 乘以列向量a b c 等于0。如何决定a b c呢？如果我们看最后一行的话。
那么b应该等于c，如果看第二行的话 a应该等于b，如果a等于b等于c同时成立
那么第一行结果永远是零，所以我们就可以将 第一个特证向量取为1 1
1，对于第二个和第三个特证值
你可以用一样的方法，我将省略这里的计算，直接写出答案。
第二个特证向量可以取为1 负1 1 第三个特证向量 可以取为4 负2 正1
这就是矩阵A的所有特证值与所有特证向量。

有了这些信息我们就可以写出方程 u导数等于A乘以u的一般解。
那么u的一般解将由如下式子给出。u的一般解就等于一个常数c1
乘以e的λ1乘以t次方，那么也就是e的t次方。再乘以第一个特证向量x1
加上另外一个常数c2乘以e的λ 2的t次方，也就是负t次方再乘以第二个特证向量x2
同理再加上另外一个常数 乘以e的负2t次方再乘以x3 这就是ut的一般解。
关于常数c1 c2和c3的选取是任意的。那么如何从ut得到y呢？你可以看到
根据ut的定义y就是ut的最后一个坐标。那么这里我们只需要x1
x2和x3的最后一个坐标。你可以看到它们都为1，所以 yt的一般解也就由
常数c1乘以e的t次方加上c2乘以 e的负t次方加上c3乘以e的负2t次方给出。
这就是原来常微分方程的一般解。
好，我们已经完成了问题的第一部分，下面我们将要试图
寻找到指数矩阵At的第一列。我们可以一起来回顾指数矩阵At的公式。
矩阵指数At将由三个矩阵 的乘积给出，分别记为矩阵S 乘以矩阵e的大写Λ的t次方
再乘以S的逆矩阵 那么什么是S，什么是e的Λ的t次方呢？
S是如下矩阵，S的列全部由原来的 特证向量给出，x1 x2和x3所以S就为x1 x2 x3
那么你可以把它写出，也就是1 1 1 1 负1 1 4 负2 1
这就是矩阵S，中间这个矩阵就为一个对角阵， 对角线上的元素
就为e的t次方，e的负t次方和e的负2t次方。
这里的系数分别对应于你所得到的三个特证值， 好，我们有了矩阵S，
有了矩阵e的Λ的t次方，我们就可以求解 这个指数矩阵了。所以这个指数矩阵
就等于S 乘以这个矩阵，再乘以S的逆，你可以看到
头两个矩阵的乘积较简单，因为这是一个对角阵，
x的列又由x1，x2，x3列向量给出，
那么前两个矩阵的乘积就应该为e的t次方乘以x1，e的负t次方

乘以x2，e的负2t次方乘以x3，下面我们需要用这个矩阵再乘以S的逆，
但是因为我们只关注结果的第一列，而结果第一列将由这些列的线性组合给出，
线性组合的系数将由S逆的第一列给出，
所以其实我们只需要找到S逆的第一列即可。

那么S逆的第一列由什么给出呢？我们可以一起来回顾S逆的公式
S的逆矩阵等于一个常数也就是1除以S的行列式，再乘以矩阵C的转置，
矩阵C的元素由矩阵S的代数余子式给出，
对它求转置，再除以矩阵S的行列式就得到了S的逆。
那么我们只需要这个矩阵的第一列。
同样你可以用任意一种方法求解矩阵S的行列式
正确结果应该为6，也就是说这里的常数应为6分之1，
那么矩阵C转置的第一列是什么呢？这个位置的元素将由这个位置代数余子式
给出，也就是负1减去负2为1。这个位置的元素，将由这个位置
代数余子式给出，也就是1减去负2为3，
但是不要忘记这是1，2位置元素，所以应该是负3。最后这个位置的元素将由
这个位置代数余子式给出，也就是1减去负1为2，
所以这里应该为2。这里需要注意的两点是
第一不要忘记我们所取的是矩阵C的转置，第二不要忘记这里这个系数负1，
好，下面我们把这一列抄到这里，也就是6分之1，负2分之1，和3分之1。
这就足够我们写出系数矩阵At的第一列了。系数矩阵A的第一列，
由这些列的线性组合给出，也就是6分之1倍的e的t次方乘以x1，
减掉2分之一的e的负t次方乘以x2，再加上3分之1的e的负2t次方乘以x3，
这就是我们所要寻找的第一列。这就是正确答案，如果你
希望进行更多练习的话，你可以完成对于矩阵S逆的求解。
并完成对于系数矩阵At的求解。但是我将停在这里，好感谢收看。
希望下次再见！